Lógica para Computação

Davi Romero de Vasconcelos

Universidade Federal do Ceará em Quixadá, Brasil
daviromero@ufc.br

Sistema Tableau Analítico

- Os sistemas Axiomático e Dedução Natural permitem demonstrar quando uma fórmula é derivada de um conjunto de fórmulas ($\Gamma \vdash \varphi$). Contudo, nenhum desses métodos nos permite inferir que $\Gamma \nvdash \varphi$. Note que $\Gamma \nvdash \varphi$ não implica em $\Gamma \vdash \neg\varphi$.
- O método da Tabela-Verdade é um procedimento de decisão que nos permite provar se $\Gamma \vdash \varphi$ ou $\Gamma \nvdash \varphi$. Contudo, esse procedimento tem um crescimento no número de linhas exponencial em relação ao número de símbolos proposicionais.
- O sistema de inferência de **Tableau Analítico (Semântico)** é um método de decisão que não necessariamente gera provas de tamanho exponencial.
- Tableau é um método de inferência baseado em *refutação*: para provarmos $\Gamma \vdash \varphi$, afirmamos a *veracidade* de Γ e a *falsidade* de φ, na esperança de derivarmos uma *contradição*. Por outro lado, se não for obtida uma contradição, então teremos construído um *contra-exemplo*, i.e., uma valoração que satisfaz Γ e não satisfaz φ.

Sistema Tableau Analítico

- Para afirmar a veracidade ou falsidade de uma fórmula, o método dos tableaux analíticos marca as fórmulas com os símbolos T para verdade e F para falsidade.
- O passo inicial na criação de um tableau é marcar todas as fórmulas de Γ com T e a fórmula φ com F.
- A partir do tableau inicial, utiliza-se regras de expansão do tableau que adicionam novas fórmulas ao final de um ramo (regras do tipo α) ou que bifurcam um ramo em dois (regras do tipo β).

Tipo α	$T\ \varphi \wedge \psi$ $T\ \varphi$ $T\ \psi$	$F\ \varphi \vee \psi$ $F\ \varphi$ $F\ \psi$	$F\ \varphi \rightarrow \psi$ $T\ \varphi$ $F\ \psi$	$T\ \neg\varphi$ $F\ \varphi$ $F\ \neg\varphi$ $T\ \varphi$
Tipo β	$F\ \varphi \wedge \psi$ $F\ \varphi$ | $F\ \psi$	$T\ \varphi \vee \psi$ $T\ \varphi$ | $T\ \psi$	$T\ \varphi \rightarrow \psi$ $F\ \varphi$ | $T\ \psi$	

- Note que as regras α e β não são aplicadas aos átomos.

Sistema Tableau Analítico

- Em cada ramo, uma fórmula só pode ser expandida uma única vez.
- Um ramo que não possui mais fórmulas para expandir é dito **saturado**.
- Um ramo que possui uma par de fórmulas $T\ \varphi$ e $F\ \varphi$ é dito **fechado**. Um ramo fechado não precisa mais ser expandido.
- Um tableau que tem todos os seus ramos fechados é dito fechado, ou seja, $\Gamma \vdash \varphi$.
- Um ramo saturado e não fechado nos fornece um *contra-exemplo*, ou seja, $\Gamma \nvdash \varphi$.

Exemplos de Provas em Tableau Analítico

$\vdash_{TA} A \vee \neg A$

$F\ A \vee \neg A$

$F\ A$

$F \neg A$

$T\ A$

$\times$

$A \to B, B \to C \vdash_{TA} A \to C$

$T\ A \to B$

$T\ B \to C$

$F\ A \to C$

$T\ A$

$F\ C$

$F\ A \qquad T\ B$

$\times \qquad F\ B \qquad T\ C$

$\qquad \times \qquad \times$

$A, A \wedge B \to C \nvdash_{TA} C$

$T\ A$

$T\ A \wedge B \to C$

$F\ C$

$F\ A \wedge B \qquad T\ C$

$F\ A \qquad F\ B \qquad \times$

$\times$

Contra-exemplo:
$v(A) = T$ e $v(B) = v(C) = F$

Sistema Tableau Analítico

- O Sistema de Tableau Analítico pode ser expandido para incluir as demonstrações da Lógica de Primeira-Ordem, no qual temos todas as regras da Lógica Proposicional e as seguintes regras:

Tipo γ	$T\ \forall x\varphi(x)$ $\mid$ $T\ \varphi(t)$ x é substituível por t em φ	$F\ \exists x\varphi(x)$ $\mid$ $F\ \varphi(t)$ x é substituível por t em φ
Tipo δ	$F\ \forall x\varphi(x)$ $\mid$ $F\ \varphi(a)$ a é uma variável nova	$T\ \exists x\varphi(x)$ $\mid$ $T\ \varphi(a)$ a é uma variável nova

- As regras acima podem ocorrer mais de uma vez em cada ramo, pois podemos fazer arbitrárias substituições de variáveis. Dessa forma, no caso geral, não conseguiremos gerar um contra-exemplo.

Exemplos de Provas em Tableau Analítico

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \vdash M(s)$$

$$\begin{array}{c}
T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\
T\ H(s) \\
F\ M(s) \\
| \\
T\ H(s) \rightarrow M(s) \\
\begin{array}{cc}
F\ H(s) & T\ M(s) \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}$$

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \forall x H(x) \vdash \forall x M(x)$$

$$\begin{array}{c}
T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\
T\ \forall x H(x) \\
F\ \forall x M(x) \\
| \\
F\ M(a) \\
| \\
T\ H(a) \rightarrow M(a) \\
| \\
T\ H(a) \\
\begin{array}{cc}
F\ H(a) & T\ M(a) \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}$$

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \forall x \neg M(x) \vdash \neg \exists x H(x)$$

$$\begin{array}{c}
T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\
T\ \forall x \neg M(x) \\
F\ \neg \exists x H(x) \\
| \\
T\ \exists x H(x) \\
| \\
T\ H(a) \\
| \\
T\ \neg M(a) \\
| \\
F\ M(a) \\
| \\
T\ H(a) \rightarrow M(a) \\
\begin{array}{cc}
F\ H(a) & T\ M(a) \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}$$

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

- O sistema de Tableau Analítico (TA) usualmente é apresentado por meio de árvores. Mas, podemos apresentar uma versão de TA em um Estilo a la Fitch.
- No Estilo de Fitch as demonstrações são apresentadas de forma linear e sequencial, na qual cada uma das linhas da prova é numerada, tem uma afirmação e uma justificativa.
- As justificativas são definidas por serem as premissas ou a conclusão da prova ou pela aplicação de uma das regras do TA.
- Cada ramo de uma bifurcação da árvore é delimitado por $\{$ e $\}$.
- Um ramo bifurcado pode ser bifurcado novamente por uma regra do tipo beta. Assim, podemos ter aninhamentos de delimitadores $\{$ e $\}$.
- Uma fórmula só pode ser utilizada em uma prova em um determinado ponto se essa fórmula aconteceu anteriormente e dentro daquele ramo.

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Tableau Inicial

1.	$T\ \varphi_1$	Premissa
2.	$T\ \varphi_2$	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$T\ \varphi_n$	Premissa
n+1.	$F\ \psi$	Conclusão
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$A \vdash A$$

1.	$T\ A$	Premissa
2.	$F\ A$	Conclusão
3.	$\vdots$	$\vdots$

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Ramo Fechado

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m.$	T φ	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	F φ	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p.$	$\perp$	m,n

$$A \vdash A$$

1.	$T\ A$	Premissa
2.	$F\ A$	Conclusão
3.	$\perp$	1,2

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Negação ($\neg T$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	T $\neg\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	F φ	m

Regra Negação ($\neg F$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	F $\neg\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	T φ	m

$$A \vdash \neg\neg A$$

1.	T A	Premissa
2.	F $\neg\neg A$	Conclusão
3.	T $\neg A$	2
4.	F A	3
5.	$\perp$	1,4

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Conjunção ($\wedge T$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	T $\varphi \wedge \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	T φ	m
n+1.	T ψ	m

$$A \wedge B \vdash A$$

1.	T A$\wedge B$	Premissa
2.	F A	Conclusão
3.	T A	1
4.	T B	1
5.	$\perp$	2,3

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Conjunção ($\wedge F$)

$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m.	F $\varphi \wedge \psi$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n.	$\{$	F φ	m
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\}$		
p.	$\{$	F ψ	m
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\}$		

$$A, B \vdash A \wedge B$$

1.	T A		Premissa	
2.	T B		Premissa	
3.	F A$\wedge B$		Conclusão	
4.	$\{$	F A	3	
5.		$\perp$	1,4	$\}$
6.	$\{$	F B	3	
7.		$\perp$	2,6	$\}$

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Disjunção ($\vee T$)

$$
\begin{array}{llll}
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{m.} & \text{T } \varphi \vee \psi & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{n.} & \{ & \text{T } \varphi & m \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \} & & \\
\text{p.} & \{ & \text{T } \psi & m \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \} & &
\end{array}
$$

$$A \vee B, \neg B \vdash A$$

$$
\begin{array}{lllll}
1. & \text{T } A \vee B & & \text{Premissa} & \\
2. & \text{T } \neg B & & \text{Premissa} & \\
3. & \text{F A} & & \text{Conclusão} & \\
4. & \text{F B} & & 2 & \\
5. & \{ & \text{T A} & 1 & \\
6. & & \perp & 3,5 & \} \\
7. & \{ & \text{T B} & 1 & \\
8. & & \perp & 4,7 & \}
\end{array}
$$

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Disjunção ($\vee F$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	F $\varphi \vee \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	F φ	m
n+1.	F ψ	m

$A \vdash A \vee B$

1.	T A	Premissa
2.	F A$\vee B$	Conclusão
3.	F A	2
4.	F B	2
5.	$\perp$	1,3

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Implicação ($\rightarrow T$)

$$
\begin{array}{llll}
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{m.} & \text{T}\ \varphi \rightarrow \psi & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{n.} & \{ & \text{F}\ \varphi & m \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \} & & \\
\text{p.} & \{ & \text{T}\ \psi & m \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \} & &
\end{array}
$$

$$\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$$

$$
\begin{array}{llll}
1. & \text{T}\ \neg A \rightarrow B & & \text{Premissa} \\
2. & \text{F A}\vee B & & \text{Conclusão} \\
3. & \text{F A} & & 2 \\
4. & \text{F B} & & 2 \\
5. & \{ & \text{F}\ \neg A & 1 \\
6. & & \text{T A} & 5 \\
7. & & \perp & 6{,}3\ \ \} \\
8. & \{ & \text{T B} & 1 \\
9. & & \perp & 8{,}4\ \ \}
\end{array}
$$

Sistema de Tableau Analítico a la Fitch

Regra Implicação ($\rightarrow F$)

⋮	⋮	⋮
m.	F $\varphi \rightarrow \psi$	
⋮	⋮	⋮
n.	T φ	*m*
n+1.	F ψ	*m*

$$B \vdash A \rightarrow B$$

1.	T B	Premissa
2.	F A$\rightarrow B$	Conclusão
3.	T A	2
4.	F B	2
5.	$\perp$	1,4

Sistema Tableau Analítico a la Fitch

Para Todo ($\forall T$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	T $\forall x \varphi(x)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	T $\varphi(t)$	m

x é substituível por t em φ

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \vdash M(s)$$

1.	$T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	Premissa
2.	$T\ H(s)$	Premissa
3.	$F\ M(s)$	Conclusão
4.	$T\ H(s) \rightarrow M(s)$	1
5.	{ F H(s)	4
6.	$\perp$	2,6 }
7.	{ T M(s)	4
8.	$\perp$	7,3 }

Sistema Tableau Analítico a la Fitch

Para Todo ($\forall F$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	F $\forall x \varphi(x)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	F $\varphi(a)$	m

a é uma variável nova

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \forall x H(x) \vdash \forall x M(x)$$

1.	$T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	Premissa
2.	$T\ \forall x H(x)$	Premissa
3.	$F\ \forall x M(x)$	Conclusão
4.	$F\ M(a)$	3
5.	$T\ H(a)$	2
6.	$T\ H(a) \rightarrow M(a)$	1
7.	{ F H(a)	6
8.	$\perp$	5,7 }
9.	{ T M(a)	6
10.	$\perp$	9,4 }

Sistema Tableau Analítico a la Fitch

Existencial ($\exists T$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	T $\exists x \varphi(x)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	T $\varphi(a)$	m

a é uma variável nova

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \forall x \neg M(x) \vdash \neg \exists x H(x)$$

1.		$T\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	Premissa
2.		$T\ \forall x \neg M(x)$	Premissa
3.		$F\ \neg \exists x H(x)$	Conclusão
4.		$T\ \exists x H(x)$	3
5.		$T\ H(a)$	4
6.		$T\ \neg M(a)$	2
7.		$F\ M(a)$	6
8.		$T\ H(a) \rightarrow M(a)$	1
9.	{	F H(a)	8
10.		$\perp$	5,9 }
11.	{	T M(a)	8
12.		$\perp$	11,7 }

Sistema Tableau Analítico a la Fitch

Existencial ($\exists F$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	F $\exists x\varphi(x)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	F $\varphi(t)$	m

x é substituível por t em φ

$$P(a), \exists x P(x) \to B \vdash B$$

1.		$T\ P(a)$	Premissa
2.		$T\ \exists x P(x) \to B$	Premissa
3.		$F\ B$	Conclusão
4.	{	F $\exists x P(x)$	2
5.		F P(a)	4
6.		$\perp$	1,5 }
7.	{	T B	2
8.		$\perp$	7,3 }

ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

- ANITA é um assistente de provas para auxiliar a verificação da correção de provas lógicas no Sistema de Tableau Analítico
  `https://sistemas.quixada.ufc.br/anita`
- A ideia central foi verificar as demonstrações de maneira mais próxima possível das demonstrações feitas em papel.
- A linguagem de entrada é semelhante ao estilo de Fitch de Dedução Natural, na qual cada ramo de uma bifurcação da árvore é delimitado por { e }.
- ANITA gera código LaTeX das árvores a partir de uma demostração correta. Use o pacote *qtree* em seu código LaTeX.
- Também é possível abrir o código diretamente no Overleaf.

Símbolo	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\forall$x	$\exists$x	$\bot$	bifurcação	$\vdash$
LaTeX	\lnot	\land	\lor	\rightarrow	\forall x	\exists x	\bot	[.]	\vdash
ANITA	~	&	|	->	Ax	Ex	@	{}	|-

Figura: Equivalência entre os símbolos da lógica, ANITA e LaTeX

ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

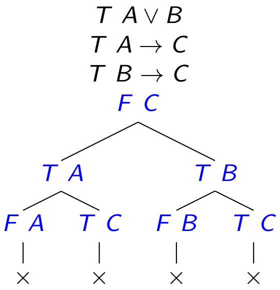
- Os átomos e os predicados são escritos em letras maiúsculas (e.g. A, B, $\mathrm{H(x)}$);
- As variáveis são escritas com a primeira letra em minúsculo, podendo ser seguida de letras e números (e.g. x, $\mathrm{x0}$, $\mathrm{xP0}$);
- As fórmulas com o $\forall x$ e $\exists x$ serão representadas por *Ax* e *Ex* ('A' e 'E' seguidos da variável x). Por exemplo, $\mathrm{Ax\ (H(x){-}{>}M(x))}$ representa $\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$.
- A ordem de precedência dos quantificadores e dos conectivos lógicos é definida por $\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow$ com alinhamento à direita. Por exemplo:
  - A fórmula $\mathrm{\sim A\&B{-}{>}C}$ representa a fórmula $(((\neg A) \wedge B) \rightarrow C)$;
  - O teorema $\mathrm{\sim A|B}$ |- $\mathrm{A{-}{>}C}$ representa o teorema $((\neg A) \vee B) \vdash (A \rightarrow B)$.
- Cada regra de inferência será nomeada por seu respectivo conectivo e o valor-verdade da fórmula. Por exemplo, $\mathrm{\&T}$ representa a regra da conjunção quando a fórmula é verdadeira. Opcionalmente, o nome da regra pode ser omitido.
- As justificativas das Premissas e da Conclusão utilizam as palavras reservadas pre e $\mathrm{conclusao}$, respectivamente.

ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

Check » Manual Latex Latex in Overleaf

```
1. T A|B                  pre
2. T A->C                 pre
3. T B->C                 pre
4. F C                    conclusao
5. {    T A               1
6.      {       F A       2
7.              @         5,6
        }
8.      {       T C       2
9.              @         8,4
        }
   }
10.{    T B               1
11.     {       F B       3
12.             @         10,11
        }
13.     {       T C       3
14.             @         13,4
        }
   }
```

```
A demonstração abaixo está correta.
A|B, A->C, B->C |- C
```

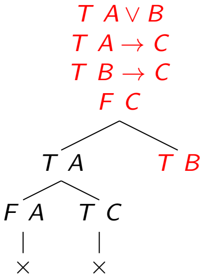


ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

Check » Manual Latex Latex in Overleaf

```
1. T A|B                 pre
2. T A->C                pre
3. T B->C                pre
4. F C                   conclusao
5. {    T A              1
6.      {       F A      2
7.              @        5,6
        }
8.      {       T C      2
9.              @        8,4
        }
   }
10.{    T B              1
   }
```

```
A demonstração do teorema abaixo não
está completa.
A|B, A->C, B->C |- C
Os ramos abaixo não estão saturados:
Ramo:
  1. T A|B pre
  2. T A->C pre
  3. T B->C pre
  4. F C conclusao
  10. T B |T 1
```

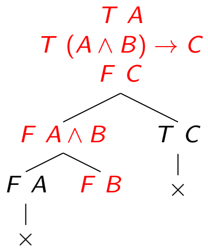


ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

Check » Manual Latex Latex in Overleaf

```
1. T A                    pre
2. T A&B->C               pre
3. F C                    conclusao
4. {     F A&B            2
5.       {       F A      4
6.               @        1,5
         }
7.       {       F B      4
         }
   }
8. {     T C              2
9.       @                8,3
   }
```

```
O Teorema abaixo não é válido.
A, (A&B)->C |- C
São contra-exemplos:
  v(A)=T, v(B)=F, v(C)=F
```

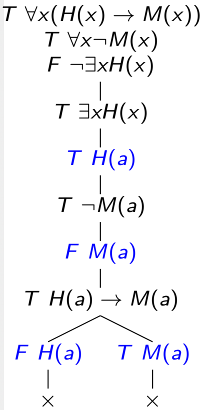


ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

Check » Manual Latex Latex in Overleaf

```
1. T Ax (H(x)->M(x))      pre
2. T Ax ~M(x)             pre
3. F ~Ex H(x)             conclusao
4. T Ex H(x)              3
5. T H(a)                 4
6. T ~M(a)                2
7. F M(a)                 6
8. T H(a)->M(a)           1
9. {    F H(a)            8
10.     @                 5,9
   }
11.{    T M(a)            8
12.     @                 11,7
   }
```

```
A demonstração abaixo está correta.
Ax (H(x)->M(x)), Ax ~M(x) |- ~Ex H(x)
```



ANITA - ANalytic Tableau proof Assistant

Check » Manual

```
1. T Ex H(x)            pre
2. T H(a)->M(a)         pre
3. F M(a)               conclusao
4. T H(a)               1
5. {     F H(a)         2
6.       @              4,5
   }
7. {     T M(a)         2
8.       @              7,3
   }
```

```
Os seguintes erros foram encontrados:

Erro de sintaxe na linha 4:
4. T H(a)               1
     ^, A variável utilizada nesta
fórmula H(a) é uma variável livre de
uma fórmula definida anteriormente e,
portanto, não pode ser utilizada
nesta regra.
```